1. Introduction

Pour tout nombre réel t, on note $\lfloor t \rfloor$, la partie entière de t, c'est-à-dire, le plus petit entier relatif k qui réalise $k \leq t$, donc l'unique entier relatif p tel que $p \leq t < p+1$. On peut facilement démontrer que :

$$\forall (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k,$$

en effet si $p = \lfloor x \rfloor$ alors $p \in \mathbb{Z}$ et $p \leq x < p+1$, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $p+k \in \mathbb{Z}$ et $p+k \leq x+k < (p+k)+1$, ce qui veut dire que $\lfloor x+k \rfloor = p+k$, donc $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

2. Question

A mon humble avis, il vaut mieux poser la question comme suit :
Soit k un nombre entier naturel impair tel que $k \geq 3$. Démontrer que

$$A_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{2i}{k} \right\rfloor = \frac{k-1}{2}.$$

3. Une réponse

Soit k un tel entier naturel, donc $k = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 1$. On a alors :

$$A_k = \sum_{i=1}^{2m} \left\lfloor \frac{2i}{2m+1} \right\rfloor.$$

Pour tout $i \in [\![1, 2m]\!]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2i}{2m+1} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2i < 2m+1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2i \leq 2m \\ &\Leftrightarrow \quad i \leq m. \end{aligned}$$

Il en découle que pour tout $i \in [\![1, 2m]\!]$, on a

$$i \leq m \Rightarrow \left\lfloor \frac{2i}{2m+1} \right\rfloor = 0,$$

par suite, on a

$$A_k = \sum_{i=m+1}^{2m} \left\lfloor \frac{2i}{2m+1} \right\rfloor,$$

et par le changement d'indice $j = i - m$, on peut écrire :

$$(\star) \quad A_k = \sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{2j+2m}{2m+1} \right\rfloor,$$

comme , pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on a :

$$\frac{2j+2m}{2m+1} = \frac{2j-1+2m+1}{2m+1} = 1 + \frac{2j-1}{2m+1}$$

et que pour tout nombre réel x, on a

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1,$$

d'une part et d'autre part comme pour

$$\forall j \in [\![1, m]\!], \quad 2j-1 < 2m+1,$$

ce qui fournit $\left\lfloor \dfrac{2j-1}{2m+1} \right\rfloor = 0$, on déduite de $(\star)$, que $A_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} 1 = m$, et comme $2m+1 = k$, on a $m = \dfrac{k-1}{2}$, donc

$$A_k = \frac{k-1}{2}.$$